ΛΥΣΕΙΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2007

ΘΕΜΑ 1ο

α.

$2\omega + 4\omega + 3\omega + \omega = 100 \quad \Leftrightarrow \quad 10\omega = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 10$

β.

β1. Για ω = 10 ο πίνακας γίνεται

Λάθη (x_i)	Μαθητές (ν_i)	Σχετική συχνότητα (f_i%)
2	10	20
5	20	40
6	15	30
8	5	10
Αθροίσματα	50	100

Η στήλη των συχνοτήτων συμπληρώθηκε με βάση τον τύπο $fi = \dfrac{\nu_i}{\nu}$

β2. $\bar{x} = \dfrac{2\cdot10+5\cdot20+6\cdot15+8\cdot5}{50} = \dfrac{20+100+90+40}{50} = \dfrac{250}{50} = 5$ λάθη

β3. Αν $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{50}$ είναι οι παρατηρήσεις τότε

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{50}}{50} \quad \Leftrightarrow \quad 5 = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{50}}{50} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{50} = 5\cdot50 = 250$$

Αν $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_{50}$ είναι οι παρατηρήσεις που προστίθενται τότε

$$\bar{\psi} = \frac{\psi_1+\psi_2+\psi_3+\ldots+\psi_{50}}{50} \quad \Leftrightarrow \quad 6 = \frac{\psi_1+\psi_2+\psi_3+\ldots+\psi_{50}}{50} \quad \Leftrightarrow$$

$$\psi_1+\psi_2+\psi_3+\ldots+\psi_{50} = 6\cdot50 = 300$$

Η νέα μέση τιμή $\bar{x}'$ θα είναι

$$\bar{x}' = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{50}+\psi_1+\psi_2+\psi_3+\ldots+\psi_{50}}{100} = \frac{250+300}{100} = 5{,}5 \text{ λάθη}$$

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+}\frac{2x^2-6x}{x-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to3^+}\frac{2x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to3^+} 2x = 2\cdot3 = 6$$

β.

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-}(2e^{3-x}+x^2+kx-2) = 2\cdot e^0 + 3^2 + k\cdot3 - 2 = 2 + 9 + 3k - 2 = 9 + 3k$$

γ.

Πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = f(3) \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 9 + 3k = 9 + 3k$

$$6 = 9 + 3k$$
$$3k = -3$$
$$k = -1$$

δ.

Όταν $x < 3$, έχουμε $f'(x) = (2e^{3-x} + x^2 + kx - 2)' =$
$= (2e^{3-x})' + (x^2)' + (kx)' - 2' =$
$= 2e^{3-x}(3-x)' + 2x + k - 0 =$
$= -2e^{3-x} + 2x + k$

και $f''(x) = (-2e^{3-x} + 2x + k)' =$
$= (-2e^{3-x})' + (2x)' + k' =$
$= 2e^{3-x} + 2 + 0 = 2e^{3-x} + 2$

Άρα $f''(2) = 2e^{3-2} + 2 = 2e + 2$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Πρέπει να ισχύει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R} - \{1\}$

β.

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x-1)'(x+1)}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

γ.

Στο (β) αποδείχθηκε ότι $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$

δ.

$f(0) = \dfrac{0+1}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$, $f(3) = \dfrac{3+1}{3-1} = \dfrac{4}{2} = 2$ και $f'(2) = \dfrac{-2}{(2-1)^2} = \dfrac{-2}{1} = -2$

Άρα $f(0)\,f(3) - f'(2) = (-1)\cdot 2 - (-2) = -2 + 2 = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

$h(3) = \frac{3^2}{18} = \frac{9}{18} = 0,5\,\text{m}$

β.

$V(t) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{t^2}{18} = \frac{2t^2}{9}\ \text{m}^3$

γ.

$V'(t) = \left(\frac{2t^2}{9}\right)' = \frac{4t}{9}$, οπότε $V'(5) = \frac{20}{9}\,\text{m}^3 / \text{min}$

δ.

Ο όγκος της δεξαμενής είναι ίσος με $V = 2^3 = 8\ \text{m}^3$

Η δεξαμενή θα γεμίσει όταν $V(t) = 8 \Leftrightarrow \frac{2t^2}{9} = 8 \Leftrightarrow t^2 = 36 \Leftrightarrow t = 6\ \text{min}$,

δεδομένου ότι $t > 0$